Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg

# Didaktische Aspekte der mathematischen Notation

Henning Thielemann

DMV-Jahrestagung 2007


## 1 Zusammenfassung

Im Gegensatz zu natürlichen Sprachen gilt die mathematische Formelsprache als besonders genau und unmissverständlich. Jedoch werden in der Praxis häufig verkürzte Schreibweisen verwendet und es werden Schemata für spezielle Aufgaben benutzt, die sich schwer mit anderen kombinieren lassen.
In der Schule werden meistens nur die verkürzten Schreibweisen gelehrt. Im folgenden soll untersucht werden, wie die Kenntnis ausführlicher Formen Verständnisschwierigkeiten und typische Fehlerquellen beseitigen kann.


## 2 Gleichungen

In der Schule: Lösung von Gleichungen durch Gleichungsumformungen, Angabe der Lösungsmenge am Schluss.

$$\begin{aligned} 2\cdot x+3 &= 7 \\ 2\cdot x &= 4 \\ x &= 2 \\ L &= \{2\} \end{aligned}$$

Welche Umformungen sind erlaubt, welche nicht? Was bedeutet „erlaubt“? Wann braucht man eine Probe, wann eine Fallunterscheidung?

Statt Gleichungsumformungen:
Umformungen von Lösungsmengenbeschreibungen
Ziel: Vereinfachte Beschreibung der Lösungsmenge

$$\begin{aligned} &\{x : 2\cdot x+3=7\} \\ &\{x : 2\cdot x=4\} \\ &\{x : x=2\} \\ &\quad\{2\} \end{aligned}$$

Quadratische Gleichung, üblicher Lösungsweg:

$$\begin{array}{ll} (x-2)^2=4 & \\ x_1-2=-2 & x_1=0 \\ x_2-2=2 & x_2=4 \\ L=\{0,4\} & \end{array}$$

Besser:

$$\begin{aligned} x-2 &\in \{-2,2\} \\ x &\in \{0,4\} \end{aligned}$$

Als Mengenumformung:

$$\begin{aligned} &\{x : (x-2)^2=4\} \\ &\{x : x-2\in\{-2,2\}\} \\ &\quad\{0,4\} \end{aligned}$$

### 2.1 Äquivalente Umformung

Lösungsmenge bleibt gleich

$$\{x:2\cdot x+3=7\} = \{x:2\cdot x=4\}$$

### 2.2 Scheinlösungen

Anwendung von Funktion auf beiden Seiten der Gleichung ist immer „erlaubt“.
Problem: Im allgemeinen vergrößert sich Lösungsmenge.
Ausnahme: Funktion ist umkehrbar

$$\begin{aligned} &\{x:\sqrt{2-x}=x \wedge x\le 2\} \qquad [2, \text{H17}] \\ \subseteq\ &\{x:2-x=x^2 \wedge x\le 2\} \\ =\ &\{x:0=-2+x+x^2 \wedge x\le 2\} \\ =\ &\{-2,1\} \end{aligned}$$

Probe entspricht Schnitt von vergrößerter Menge mit eigentlicher Lösungsmenge

$$\begin{aligned} &\{x:\sqrt{2-x}=x \wedge x\le 2\} = \\ &\qquad \{x:\sqrt{2-x}=x \wedge x\le 2\}\cap\{-2,1\}=\{1\} \end{aligned}$$

### 2.3 Fallunterscheidung

**Absoluter Betrag**

Darf man auf beiden Seiten der Gleichung Quadratwurzeln ziehen? Ja, wenn beide Seiten nicht-negativ.
Problem: Wurzel hebt Quadrat nicht auf.

$$\begin{aligned} &\{x:x^2=4 \wedge x\in\mathbb{R}\} \\ =\ &\{x:\sqrt{x^2}=\sqrt{4} \wedge x\in\mathbb{R}\} \\ =\ &\{x:|x|=2 \wedge x\in\mathbb{R}\} \\ =\ &\{x:x=2 \wedge x\ge 0\}\cup\{x:-x=2 \wedge x<0\} \\ =\ &\{2,-2\} \end{aligned}$$

**Division durch Null**

$$\begin{aligned} &\{x:x^2=4\cdot x \wedge x\in\mathbb{R}\} \\ =\ &\{x:x=4 \wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}\cup\{x:x^2=4\cdot x \wedge x=0\} \\ =\ &\{4\}\cup\{0\} \\ =\ &\{0,4\} \end{aligned}$$

## 3 Analytische Geometrie

**Lineare Unabhängigkeit**

Für $a\ne 0$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tupel | $(a,a)$ | – | linear abhängig |
| Multimenge | $[a,a]$ | – | linear abhängig |
| Menge | $\{a,a\}$ | – | linear unabhängig |

**Ebene**

- implizit, $n\in\mathbb{R}^3, d\in\mathbb{R}$
  $$E(n,d)=\{P:\langle P,n\rangle=d \wedge P\in\mathbb{R}^3\}$$
- explizit, $\{P,a,b\}\subset\mathbb{R}^3$, $[a,b]$ linear unabhängig
  $$\begin{aligned} E(P,a,b) &= P+\{\lambda\cdot a:\lambda\in\mathbb{R}\}+\{\lambda\cdot b:\lambda\in\mathbb{R}\} \\ &= \{P+\lambda\cdot a+\mu\cdot b:\{\lambda,\mu\}\subseteq\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

**Gerade**

- implizit, $\{n_1,n_2\}\subset\mathbb{R}^3$, $[n_1,n_2]$ linear unabhängig
  $$\begin{aligned} g((n_1,d_1),(n_2,d_2)) &= E(n_1,d_1)\cap E(n_2,d_2) \\ &= \left\{P:\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}\cdot P=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix} \wedge P\in\mathbb{R}^3\right\} \end{aligned}$$
- explizit, $\{P,a\}\subset\mathbb{R}^3$
  $$g(P,a)=\{P+\lambda\cdot a:\lambda\in\mathbb{R}\}$$

## 4 Multiplikationszeichen

- Steht $v(x+y)$ für $v\cdot(x+y)$ oder „$v$ angewandt auf $x+y$“?
- Steht $\cos\alpha k$ für $(\cos\alpha)\cdot k$ oder $\cos(\alpha\cdot k)$?

## 5 Komplexe Zahlen

$$i=\sqrt{-1} \qquad [2, \text{H49}]$$

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)} \\ &= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1 \end{aligned}$$

## 6 Funktionen

### 6.1 Implizite Funktionen

Kreis, implizite Darstellung: $\{(x,y):x^2+y^2-r^2=0\}$

- Funktion: rechtseindeutige Relation
- Relation: implizite Funktion

### 6.2 Veränderliche Größen

**Proportionalität**

Skalare Größe $x$

- $2\cdot x\sim 3\cdot x$
- $(x\mapsto 2\cdot x)\sim(x\mapsto 3\cdot x)$

## 7 Mengen

$$\{f(x,A):x\in A\}$$

- Durchläuft $x$ alle Elemente der Menge $A$
- oder durchläuft $A$ alle Mengen, welche $x$ enthalten
- oder durchlaufen $x$ und $A$ alle Kombinationen aus Zahl und Menge mit $x\in A$ ?

## 8 Infinitesimalrechnung

### 8.1 Differentiale

- Lösung transzendenter Gleichung
  $$\begin{array}{rrcl} & \exp x &=& \sin x \quad \Big| \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ & \exp x &=& \cos x \\ \text{eine Lösung:} & x &=& 0 \\ \text{aber:} & \exp 0 &\ne& \sin 0 \end{array}$$
  - Skalare Gleichung: $\{x:\exp x=\sin x\}$
  - Funktionengleichung: $\{?:\exp=\sin\}$
- Ableiten und Einsetzen bzgl. einer Veränderlichen
  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x\Big|_{x=2} \quad\text{vs.}\quad \ln' 2 \quad\text{vs.}\quad D\ln 2$$
- Ableiten und Einsetzen bzgl. zweier Veränderlicher Normalen einer Fläche in Parameterform $P$
  $$n(u_0,v_0)=\left(\frac{\partial P}{\partial u}\times\frac{\partial P}{\partial v}\right)\Big|_{u=u_0,v=v_0}$$
  vs.
  $$n(u,v)=DP(u,v)_0\times DP(u,v)_1$$
- partielle Ableitungen: $f_x(x,y)$ vs. $f_x(y,x)$
  $$f_x(x,y)|_{x=2}=f_2(2,y) \qquad ?$$
- Totales Differential
  $$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y$$
  Was ist der Unterschied zwischen d und $\partial$ ?
  Alternative: $Dz(x,y)=(z_x(x,y),z_y(x,y))$

### 8.2 Integrale

**Integrationsvariable**

$$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zusammenhang von $x$ auf linker und rechter Seite?

$$F(2)=\int f(2)\,\mathrm{d}2 \qquad ?$$

Vorschlag: $\quad F=\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad$ oder $\quad F=\int f$

**Integrationskonstante**

$$\int\cos(x)\,\mathrm{d}x=\sin x+C$$

Wo kommt die Integrationskonstante her? [3, A3.39]

$$\begin{array}{lrcl} \text{Vorschlag:} & F &=& \displaystyle\int_{(x_0,y_0)} f \\ \text{mit} & F' &\overset{\text{f.ü.}}{=}& f \quad\wedge\quad F(x_0)=y_0 \end{array}$$


## Literatur

[1] F. Cajori, *A History of Mathematical Notation*, Dover, New York, 1993.

[2] A. Furdek, *Fehler-Beschwörer. Typische Fehler beim Lösen von Mathematik-Aufgaben*, Books on Demand, Norderstedt, 2002.

[3] A. G. Konforowitsch, *Logischen Katastrophen auf der Spur*, Fachbuchverlag Leipzig-Köln, 1992.